CONCOURS SPÉCIAL T' 1980

048 011

J. 2187

- 80 -

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Soient, dans tout ce problème, $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien orienté de dimension 3, et E son espace vectoriel (euclidien orienté) associé.

NOTATIONS.

On notera :

pour tout vecteur x de E, $\|x\|$ sa norme euclidienne;

pour tout couple (x, y) de vecteurs de E, soit $x.y$, soit $<x, y>$, son produit scalaire, et $x \wedge y$, son produit vectoriel;

pour tout triplet (x, y, z) de vecteurs de E, $[x, y, z]$, son produit mixte (égal au déterminant de cette suite de vecteurs sur toute base orthonormale directe de E);

pour tout couple (A, B) de points de $\mathcal{E}$, soit $\overrightarrow{AB}$, soit B-A, le vecteur de E qui lui est associé;

pour tout couple constitué par un point A de $\mathcal{E}$ et un vecteur non nul x de E, (A, x) la droite de $\mathcal{E}$ passant par A et parallèle à x.

DÉFINITION. — Une application $u : \mathbb{R} \to E$ est dite **unitaire** lorsqu'elle vérifie la condition $\forall t \in \mathbb{R} \quad \|u(t)\| = 1$.

RAPPEL. — On pourra utiliser sans avoir à le démontrer le résultat : pour tout triplet (x, y, z) de vecteurs de E, on a :

$$(x \wedge y) \wedge z = (x.z)\, y - (y.z)\, x.$$

I

I.1. Soient un vecteur e de E tel que $\|e\| = 1$ et s_e la symétrie orthogonale dans E par rapport à e.

(On rappelle que, pour tout vecteur x de E, si $x = x_1 + x_2$, avec x_1 et e liés, et, x_2 et e orthogonaux, alors, $s_e(x) = x_1 - x_2$.)

Calculer $s_e(x)$ en fonction de e et de x.

I.2. Soit une application $u : \mathbb{R} \to E$ continûment dérivable et unitaire.

I.2.*a*. Soit x un vecteur quelconque de E. Pour tout réel t, calculer $\frac{d}{dt}(s_{u(t)}(x))$ (dérivée en t de l'application $\mathbb{R} \to E$ définie par $t \longmapsto s_{u(t)}(x)$).

Tournez la page S. V. P.

I.2.*b*. Vérifier que, pour tout vecteur x de E et pour tout réel t, on a $\frac{d}{dt}(s_{u(t)}(x)) = 2(u(t) \wedge u'(t)) \wedge s_{u(t)}(x)$ (où u' est l'application dérivée de u).

On notera désormais $\Omega = 2(u \wedge u')$.

I.2.*c*. Déterminer les applications u pour lesquelles Ω est l'application nulle.

I.2.*d*. Déterminer les applications u pour lesquelles Ω est constante, non nulle.

Pour les applications qui satisfont à cette condition, exprimer $u(t)$ en fonction de t, $u(0)$, $u'(0)$ et Ω (en convenant d'identifier l'application constante Ω à l'unique valeur qu'elle prend).

I.3. Soient O un point de $\mathcal{E}$ et u l'une des applications obtenues à la question précédente (I. 2. *d*.).

A tout vecteur x de E, on associe le mouvement ponctuel M_x dans $\mathcal{E}$ défini par $\forall\, t \in \mathbb{R}\ \ \overrightarrow{OM_x}(t) = s_{u(t)}(x)$.

Étudier ces mouvements. (On déterminera la trajectoire de M_x en fonction de O, Ω, et x, et on indiquera comment elle est décrite en fonction du temps.)

II

On considère, dans cette partie, une application $u : \mathbb{R} \to E$ continûment dérivable et unitaire et une application $A : \mathbb{R} \to \mathcal{E}$ continûment dérivable.

Pour tout réel t, on désigne par :

$$D(t) \text{ la droite } (A(t),\ u(t))$$

et par $S_{D(t)}$ la symétrie affine orthogonale dans $\mathcal{E}$ par rapport à la droite D (t). (On rappelle que l'application linéaire associée à $S_{D(t)}$ est $s_{u(t)}$ et que les points de D (t) sont invariants par $S_{D(t)}$.)

Pour tout point M de $\mathcal{E}$ on désigne par $f_M : \mathbb{R} \to \mathcal{E}$ le mouvement ponctuel dans $\mathcal{E}$, d'intervalle de temps $\mathbb{R}$, défini par

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \qquad f_M(t) = S_{D(t)}(M).$$

Enfin, à tout instant t (i.e. : pour tout réel t) et pour tout point M de $\mathcal{E}$, on notera $V(f_M, t)$ la vitesse du mouvement ponctuel f_M à l'instant t.

II.1. Montrer qu'à tout instant t (i.e. : pour tout réel t), le champ de vecteurs sur $\mathcal{E}$ à valeurs dans E $\mathfrak{W}_t : \mathcal{E} \to E$ défini par $\forall\, M \in \mathcal{E}\ \ \mathfrak{W}_t(M) = s_{u(t)}(V(f_M, t))$ est un torseur sur $\mathcal{E}$.

(On pourra éventuellement utiliser un mouvement solide pour établir ce résultat.)

II.2. Pour tout réel t, calculer l'invariant scalaire $\lambda(t)$ du torseur $\mathfrak{W}_t$.

II.3. On suppose dans cette question que t est un réel tel que $\Omega(t) \neq 0$. On désigne alors par $\Delta(t)$ l'axe central du torseur $\mathfrak{W}_t$.

Démontrer que D (t) et $\Delta(t)$ se coupent en un point Q (t) que l'on déterminera. (On définira Q (t) par la donnée du nombre réel $\mu(t)$ tel que $\overrightarrow{A(t)\,Q(t)} = \mu(t)\, u(t)$.)

Dans les questions II.4.5. *qui suivent,* (O, *i*, *j*, *k*) *est un repère affine orthonormal direct donné de* $\mathcal{E}$.

II.4. Dans cette question, pour tout réel t

$A(t) = 0 + a(\cos t)\, i + a(\sin t)\, j$ (a réel strictement positif donné)

$u(t) = k$.

Étudier les mouvements ponctuels f_M correspondants (trajectoires et façon dont elles sont décrites en fonction du temps).

Déterminer l'application Ω correspondante.

II.5. Dans cette question, pour tout réel t

$A(t) = 0 + a(\cos t)\, i + a(\sin t)\, j$ (a réel strictement positif donné)

$u(t) = (\sin t)\, i - (\cos t)\, j$.

Déterminer à tout instant $\Omega(t)$, $\lambda(t)$, et $\Delta(t)$.

Déterminer la surface engendrée par $\Delta(t)$ quand t décrit $\mathbb{R}$.

Déterminer les trajectoires des mouvements ponctuels f_M qui correspondent aux points M de coordonnées $(d, 0, 0)$, d positif.

Indiquer comment, à l'aide de transformations géométriques simples, on peut obtenir les trajectoires de tous les mouvements ponctuels f_M à partir des précédents.

III

III.1. Soient

u_1 et u_2 deux vecteurs de E tels que $u_1 \wedge u_2 \neq 0$

A_1 et A_2 deux points de $\mathcal{E}$

et les droites $D_1 = (A_1, u_1)$ et $D_2 = (A_2, u_2)$.

On désigne par H_1 et H_2 les pieds de la perpendiculaire commune à D_1 et D_2, sur D_1 et D_2 respectivement.

Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$ dans la base $(u_1, u_1 \wedge u_2, u_2)$ de E.

Établir les formules

$$\overrightarrow{A_1 H_1} = -\frac{[\overrightarrow{A_1 A_2}, u_1 \wedge u_2, u_2]}{(u_1 \wedge u_2)^2}\, u_1$$

$$\overrightarrow{H_1 H_2} = \frac{[\overrightarrow{A_1 A_2}, u_1, u_2]}{(u_1 \wedge u_2)^2}\, (u_1 \wedge u_2).$$

III.2. Les données sont à nouveau celles de la partie II.

Soit t_0 un réel donné tel que $\Omega(t_0) \neq 0$.

Établir qu'il existe un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $I =]t_0 - a, t_0 + a[$ tel que $\forall t \in I \setminus \{t_0\}$ $u(t_0) \wedge u(t) \neq 0$.

Pour tout réel t appartenant à I privé de t_0, on appelle $q(t)$ et $r(t)$ les pieds de la perpendiculaire commune à $D(t_0)$ et $D(t)$, sur $D(t_0)$ et $D(t)$ respectivement.

Calculer les limites suivantes (dont on établira l'existence) :

$$\lim_{t \to t_0} \overrightarrow{A(t_0)\, q(t)} \qquad \lim_{t \to t_0} \frac{\overrightarrow{q(t)\, r(t)}}{t - t_0}$$

et comparer ces limites avec certains des éléments du torseur $\mathfrak{V}_{t_0}$.

Tournez la page S. V. P.

IV

Soient

deux nombres réels distincts t_1 et t_2

deux points A_1 et A_2 de $\mathcal{E}$

deux vecteurs unitaires u_1 et u_2 de E tels que $u_1 \wedge u_2 \neq 0$.

Reprenant les notations et les hypothèses de la partie II, on se propose de déterminer l'ensemble des couples (u, A) (u et A définis dans la partie II) tels que

(1) l'application de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des torseurs sur $\mathcal{E}$ $t \longmapsto \mathcal{W}_t$ soit constante.

(2)
$$u(t_1) = u_1 \qquad u(t_2) = u_2$$
$$A(t_1) = A_1 \qquad A(t_2) = A_2$$

Pour cela, supposant d'abord que ce problème admet des solutions, et désignant par (u, A) l'une d'elles,

IV.1.*a*. Démontrer que Ω est non nulle. Puis, utilisant le vecteur unitaire $k = \| u_1 \wedge u_2 \|^{-1} (u_1 \wedge u_2)$ et φ l'une des mesures de l'angle de vecteurs (u_1, u_2) dans le plan vectoriel engendré par u_1 et u_2 et orienté par k, donner les valeurs possibles de Ω en fonction de φ, k, t_1 et t_2.

Enfin, pour chacune des valeurs possibles de Ω, démontrer qu'il existe un réel ν que l'on déterminera, tel que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad u(t) = \frac{(\sin \nu (t_2 - t))\, u_1 - (\sin \nu (t_1 - t))\, u_2}{\sin \nu (t_2 - t_1)}$$

IV.1.*b*. Démontrer que Δ est la perpendiculaire commune à (A_1, u_1) et à (A_2, u_2).

Démontrer que, pour tout réel t, D (t) est perpendiculaire à Δ.

Démontrer que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad < (t_2 - t)\, \overrightarrow{A_1 A(t)} - (t_1 - t)\, \overrightarrow{A_2 A(t)}, u_1 \wedge u_2 > = 0.$$

IV.1.*c*. Évaluer l'invariant scalaire de $\mathcal{W}_t$.

IV.2. Achever la résolution de la question posée dans le préambule de IV.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail